

令和2年度入学者選抜試験問題
山形大学大学院理工学研究科博士前期課程
(令和元年8月実施)

【機械システム工学専攻】

基礎科目
(数学)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子の本文は、1ページから2ページまでです。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの乱丁・落丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 監督者の指示に従って、解答用紙に受験番号を正しく記入してください。受験番号が正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。
5. 解答用紙は1枚です。解答用紙の「受験科目」欄には、「数学」と記入してください。また、解答は表^{おもて}面から記入し、表^{おもて}面に書ききれない場合は裏面を使用しても構いません。
6. 計算によって答えを求めるときは、その過程も示してください。
7. 試験終了後、問題冊子および草案用紙は持ち帰ってください。

科目名：数 学

この科目の問題は3題あります。3題すべてを解答して下さい。

1. 次の問いに答えよ。

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ のすべての固有値を求めよ。また、最も小さい

固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。

(2) 実数 t の関数 $f(t) = \begin{cases} 1 & (0 < t \leq 1) \\ e^{1-t} & (t > 1) \end{cases}$ のラプラス変換

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

を求めよ。ただし、 s は $\operatorname{Re}(s) > -1$ を満たす複素数とする。

(3) 領域 $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq x, x + y \leq 1\}$ 上の二重積分

$$I = \iint_D \sqrt{x+y} dx dy$$

を求めよ。

2. 微分方程式 $\frac{d^2 y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 13\cos 2x$ に関する次の問いに答えよ。

(1) $\frac{d^2 y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0$ の一般解を求めよ。

(2) $\frac{d^2 y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 13\cos 2x$ の特殊解を求めよ。

(3) (1) と (2) の結果より、 $\frac{d^2 y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 13\cos 2x$ の一般解を求めよ。

(4) (3) で得られた一般解の中で、 $x=0$ のとき、 $y=1$ かつ $\frac{dy}{dx} = -4$ を満たす

解を求めよ。

3. 多変数関数に関する次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x, y)$ は偏微分可能であって、 $f_y \neq 0$ とする。このとき、関係式

$f(x, y) = 0$ から定まる x の関数 y について次の等式を導け。

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

(2) 関係式 $\tan^{-1} y + \cos^{-1} x = 1$ から定まる x の関数 y について、 $\frac{dy}{dx}$ を x, y の式

で表せ。ただし、 $\tan^{-1} y$ と $\cos^{-1} x$ は共に逆三角関数を表し、 $x \neq 1$ とする。

(3) 関数 $g(x, y, z), h(x, y, z)$ は偏微分可能であって、 $g_y h_z - g_z h_y \neq 0$ とする。このとき、2つの関係式 $g(x, y, z) = 0, h(x, y, z) = 0$ から定まる x の関数 y, z について次の等式を導け。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g_z h_x - g_x h_z}{g_y h_z - g_z h_y}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{g_x h_y - g_y h_x}{g_y h_z - g_z h_y}$$

(4) 2つの関係式 $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x - 2y + 3z = 5$ から定まる x の関数 y, z につ

いて、 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ を x, y, z の式で表せ。ただし、 $3y + 2z \neq 0$ とする。