

令和2年度入学者選抜試験問題
山形大学大学院理工学研究科博士前期課程
(令和元年8月実施)

【情報科学専攻】

基礎科目
(数学)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子の本文は、1ページのみです。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの乱丁・落丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 監督者の指示に従って、すべての解答用紙に受験番号を正しく記入してください。受験番号が正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。
5. 解答用紙は3枚あります。問題1、問題2、問題3のそれぞれに対して解答用紙1枚ずつに解答を記入してください。必要に応じて裏面を使用しても構いません。白紙の場合でも3枚すべて提出してください。
6. 解答にあたっては、どの問題に対する解答かわかるように、試験開始後、解答用紙の「受験科目」の欄に問題番号も含む形で数学1、数学2、数学3のように記入してください。また、必要に応じて導出過程も記入してください。
7. 試験終了後、問題冊子および草案用紙は持ち帰ってください。

科目名：数学

1. 次の問いに答えよ。

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ。

(2) $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$ を求めよ。

(3) $-1 < \alpha < 0$ に対して、定積分 $\int_1^e \frac{(\log x)^\alpha}{x} dx$ の値を求めよ。

2. xy 平面上に領域 $D = \{(x, y) | x^2 + 4y^2 \leq 1\}$ がある。 D 上の2重積分：

$$I = \iint_D (x^2 - y^2) dx dy$$

について、次の問いに答えよ。

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ。

(2) 変数変換 $x = r \cos \theta, y = \frac{r}{2} \sin \theta$ ($r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) によって、 xy 平面上の領域 D が $r\theta$ 平面上の領域 D' に対応するものとする。

(a) 領域 D' を $r\theta$ 平面上に図示せよ。

(b) 変換のヤコビアン $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial r}$ を r の式で表せ。

(c) $I = \frac{1}{8} \iint_{D'} r^3 (5 \cos^2 \theta - 1) dr d\theta$ となることを示せ。さらに、 I の値を求めよ。

3. 実数 x_1, x_2, x_3 を成分とするベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

に対して、2次形式 $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ を定めるとき、次の問いに答えよ。ただし、 $\mathbf{x}^T$ は $\mathbf{x}$ の転置を表し、 $\mathbf{x}^T = (x_1 \ x_2 \ x_3)$ である。

(1) A の行列式 $|A|$ の値を求めよ。

(2) 行列 A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ。

(3) $P^{-1}AP$ を対角行列にする正則行列 P を1つ求めよ。

(4) 任意のベクトル $\mathbf{x}$ に対して、 $\phi(\mathbf{x}) \geq 0$ を証明せよ。