

令和3年度入学者選抜試験問題 山形大学大学院理工学研究科博士前期課程 (令和2年8月実施)

【機械システム工学専攻】

基礎科目 (数学)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子の本文は、1ページから2ページまでです。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの乱丁・落丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 監督者の指示に従って、解答用紙に受験番号を正しく記入してください。受験番号が正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。
5. 解答用紙は1枚です。解答用紙の「受験科目」欄には、「数学」と記入してください。また、解答は表^{おもて}面から記入し、表^{おもて}面に書ききれない場合は裏面を使用しても構いません。
6. 計算によって答えを求めるときは、その過程も示してください。
7. 試験終了後、問題冊子および草案用紙は持ち帰ってください。

科目名：数 学

この科目の問題は3題あります。3題すべてを解答して下さい。

1. 次の問いに答えよ。

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1998 & 4 \\ 0 & 2021 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ がある。

(a) 行列式 $|A|$ の値を求めよ。

(b) A の固有値を求めよ。

(c) A の最も絶対値が小さい固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。

(2) 実数 t の関数 $f(t) = |1-t| + 1-t$ のラプラス変換 $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

を求めよ。ただし、 s は $\operatorname{Re}(s) > 0$ を満たす複素数とする。

(3) 領域 $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, x \leq y \leq \pi\}$ 上の二重積分

$$I = \iint_D \cos(x+y) dx dy$$

を求めよ。

2. 関数 $y(x)$ に関する微分方程式

$$y'' + 2xy' + x^2 y = e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

について、次の問いに答えよ。

(1) $y(x) = u(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$ とおくと、 $u(x)$ は

$$u'' - u = 1$$

を満たすことを示せ。

(2) 微分方程式①の一般解 $y(x)$ を求めよ。

(3) $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ を満たす解 $y_0(x)$ を求めよ。

3. スカラー場 $\varphi(x, y, z) = \sin \rho$ およびベクトル場

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (\cos \rho) \mathbf{i} + (\sin \rho) \mathbf{j} + \rho \mathbf{k}$$

について、以下の量を求めよ。ただし、 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$,

$\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ である。また、 ∇ は $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$ なる微分演算子である。

(1) $\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \rho}{\partial z}$

(2) $\text{grad} \varphi (= \nabla \varphi)$

(3) $\text{div} \mathbf{A} (= \nabla \cdot \mathbf{A})$

(4) $\text{rot} \mathbf{A} (= \nabla \times \mathbf{A})$

(5) $\text{rot}(\text{grad} \varphi)$