

令和4年度入学者選抜試験問題
山形大学大学院理工学研究科博士前期課程
(令和3年8月実施)

【情報・エレクトロニクス専攻】

基礎科目

(数学)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子の本文は、1ページから4ページまでです。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの乱丁・落丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 監督者の指示に従って、すべての解答用紙の受験番号欄に受験番号を正しく記入してください。受験番号が正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。
5. 「微分積分」と「線形代数」は必ず解答してください。
「フーリエ解析・ラプラス変換」、「情報数学」の2科目から1科目を選択して解答してください。
6. 解答用紙は3枚あります。1科目につき1枚とし、選択科目については「科目名」欄に選択した科目名（「フーリエ解析・ラプラス変換」、「情報数学」）を記入し、

の空欄には選択した問題番号を記入してください。
7. 解答は必ずおもて面の太線の下に記入してください。
8. 試験終了後、問題冊子および草案用紙は持ち帰ってください。

問題1 微分積分

xy 平面上の領域：

$$D = \left\{ (x, y) \left| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \right. \right\}$$

が、変数変換 $x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta$ によって、 $r\theta$ 平面上の領域 R に対応する。

D 上の2重積分：

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

について、次の問いに答えよ。ただし、 a と b は正の定数である。

(1) $r\theta$ 平面上の領域 R を図示せよ。

(2) 変換のヤコビアン $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial r}$ を r の式で表せ。

(3) $I = ab \iint_R r^3 (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) dr d\theta$ となることを示し、 I の値を求めよ。

問題2 線形代数

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 行列 $A+2E$ の行列式の値を求めよ。ただし、 E は単位行列である。
- (2) 行列 A のすべての固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ。
- (3) $P^{-1}AP$ を対角行列にする正則行列 P を1つ求めよ。

問題3 フーリエ解析・ラプラス変換（選択問題）

関数 $f(t)$ が $t \geq 0$ で定義されている。複素数 s を含む積分

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

が存在するとき、 $F(s)$ を $f(t)$ のラプラス変換といい、 $f(t)$ を $F(s)$ のラプラス逆変換という。次の問いに答えよ。ただし、 $\operatorname{Re} s$ は s の実部を示す。

(1) 次の関数 $f(t)$ のラプラス変換を求めよ。

(a) $f(t) = 1$ ただし、 $\operatorname{Re} s > 0$ とする。

(b) $f(t) = e^{-at}$ ただし、 a は実数であり、 $\operatorname{Re} s > -a$ とする。

(2) $F(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$ ($\operatorname{Re} s > 0$) のラプラス逆変換を $f(t)$ とする。

(a) $f(t)$ を求めよ。

(b) $f(0)$ の値と極限值 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ を求めよ。

(c) $t \geq 0$ における関数 $f(t)$ のグラフの概形をかけ。

問題4 情報数学（選択問題）

(1) 任意の命題 p, q に対して、次の命題が恒真命題になることを示せ。

(a) $(p \vee q) \vee (\neg q)$

(b) $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

(2) 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上の二項関係 R が

$$R = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (3, 6), \\ (4, 4), (5, 1), (5, 5), (6, 3), (6, 6), (a, b), (c, d)\}$$

で与えられている。 R が同値関係であるとき、次の問いに答えよ。ただし、 $(a, b), (c, d) \in A^2$ である。

(a) R の要素 (a, b) と (c, d) を求めよ。

(b) A の R に関する同値類をすべて求めよ。

(3) 連立合同方程式：

$$\begin{cases} 2x \equiv 3 \pmod{5} & \textcircled{1} \\ 4x \equiv 5 \pmod{7} & \textcircled{2} \end{cases}$$

について、次の問いに答えよ。

(a) 合同方程式①及び②の解がそれぞれ $x \equiv 4 \pmod{5}$ 及び $x \equiv 3 \pmod{7}$ であることを示せ。

(b) 連立合同方程式の一般解を求めよ。