平成２６年度入学者選抜試験問題
山形大学大学院理工学研究科博士前期課程
（平成２５年８月実施）

【電気電子工学専攻】

基礎科目

（数学）

注意事項

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2．この問題冊子の本文は，１ページから３ページまでです。

3．試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの乱丁・落丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせて下さい。

4．監督者の指示に従って，すべての解答用紙に受験番号を正しく記入して下さい。受験番号が正しく記入されていない場合は，採点できないことがあります。

5．解答用紙は４枚あります。１問につき１枚です。解答用紙の解答番号と問題番号を一致させて解答して下さい。一致していない場合は，採点できません。

6．解答は，解答用紙のおもて面にのみ記入して下さい。

7．必要に応じて計算過程も記入して下さい。

8．解答用紙は全て提出して下さい。

9．試験終了後，問題冊子及び草案用紙は持ち帰って下さい。

1. ３つのベクトル

$\boldsymbol{A} = 4\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} + \ \boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{B} = 2\,\boldsymbol{i} + 4\,\boldsymbol{j} + \ \boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{C} = \ \boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} + 4\,\boldsymbol{k}$

について，以下の設問に答えよ。ただし，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は各々x, y, z座標方向の正の向きの単位ベクトルとする。

(1) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

(2) 原点を始点とする上記３つのベクトルの先端を結んでできる三角形の面積を求めよ。

(3) 原点を始点とする上記３つのベクトルを辺とする平行六面体の体積を求めよ。

2. nを自然数とするとき，以下の設問に答えよ。

(1) 下記行列Aの行列式，固有値，および逆行列を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(2) 下記行列Bのように，対角要素より下の要素がすべて0である正方行列を上三角行列と呼ぶ。この行列の行列式と固有値を求めよ。

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

(3) 対角要素より上の要素がすべて0である下記行列Cのような正方行列を下三角行列と呼ぶ。この行列の行列式と固有値を求めよ。

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

3. 以下の微分方程式について，設問に答えよ。

$$\frac{dx(t)}{dt} - x(t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 2a\frac{dy(t)}{dt} + (a^2+1)y(t)$$

ここに $x(0) = y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = 0$，また a は実定数で，$a \neq 0$ とする。

ラプラス変換 $F(s)$ は

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

と定義する。なお，下記に示すラプラス変換表を用いてもよい。

また，$x(t)$，$y(t)$ のラプラス変換を各々 $X(s)$，$Y(s)$ とし，関数 $H(s)$ を $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ と定義する。

(1) 関数 $H(s)$ を求めよ。

(2) (1)で求めた $H(s)$の極と零点を求めよ。また，この極と零点の配置を，$a > 0$ と $a < 0$ の場合に分けて，s-平面上に描け。

(3) $H(s)$の逆ラプラス変換 $h(t)$ を求めよ。

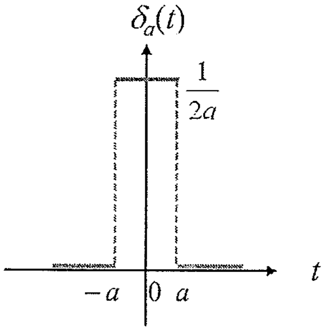
(4) (3)で求めた $h(t)$ が $t \to \infty$ で 0 に収束する条件を示せ。

ラプラス変換表

$f(t)$	$F(s)$
単位ステップ関数 $U(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}t^n$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

4. 関数$f(t)$のフーリエ変換$\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$は以下で定義されるものとする。

$$\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$



ただし，jは虚数単位とする。以下の設問に答えよ。

(1) 右図に示す関数$\delta_a(t)$のフーリエ変換を求め，これよりデルタ関数$\delta(t)=\lim_{a\to 0}\delta_a(t)$のフーリエ変換を求めよ。

(2) 以下で定義される周期Tを持つデルタ関数列$\delta_T(t)$を考える。

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

このデルタ関数列$\delta_T(t)$のフーリエ級数のフーリエ係数a_0, a_m, b_mを求めよ。また，$\delta_T(t)$のフーリエ級数が以下の式で表されることを示せ。

$$\delta_T(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j\frac{2n\pi}{T}t}$$

ただし，周期Tを持つ関数$f(t)$のフーリエ級数は以下で定義される。

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{2m\pi t}{T}+b_m\sin\frac{2m\pi t}{T}\right)$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt$$

$$a_m=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos\frac{2m\pi t}{T}dt$$

$$b_m=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin\frac{2m\pi t}{T}dt$$

(3) 関係式$\mathcal{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$を用いて以下を示せ。

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

(4) (2), (3)を利用し，デルタ関数列$\delta_T(t)$のフーリエ変換 $\Delta(\omega)$ が以下で表されることを示せ。

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)]=\Delta(\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-n\frac{2\pi}{T}\right)$$

(5) 関数$g(t)$のフーリエ変換を$G(\omega)$とする。このとき，$g(t)$をTの周期で標本化した関数$g_T(t)=g(t)\delta_T(t)$のフーリエ変換$G_\Omega(\omega)$を$G(\omega)$と(4)で求めた$\Delta(\omega)$を用いて表せ。