

平成 27 年度入学者選抜試験問題
山形大学大学院理工学研究科博士前期課程
(平成 26 年 8 月実施)

【情報科学専攻】

基礎科目
(数学)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子の本文は、1 ページのみです。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの乱丁・落丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 監督者の指示に従って、すべての解答用紙に受験番号を正しく記入してください。受験番号が正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。
5. 解答用紙は 3 枚あります。問題 1、問題 2、問題 3 のそれぞれに対して解答用紙 1 枚ずつに解答を記入してください。必要に応じて裏面を使用しても構いません。白紙の場合でも 3 枚すべて提出してください。
6. 解答にあたっては、どの問題に対する解答かわかるように、試験開始後、解答用紙の「受験科目」の欄に問題番号も含む形で数学 1、数学 2、数学 3 のように記入してください。また、必要に応じて導出過程も記入してください。
7. 試験終了後、問題冊子及び草案用紙は持ち帰ってください。

科目名：数学

1. 次の問いに答えよ.

(1) 常微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0$ の一般解を求めよ.

(2) 関数 $y = x^{\log x}$ ($x > 1$) を微分せよ.

(3) $f(x) = \begin{cases} c(1-x^4) & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$

が確率密度関数になるように, 定数 c の値を定めよ. さらに, この確率密度関数で規定される分布の平均 μ と分散 σ^2 を求めよ.

2. 行列 $A = \begin{pmatrix} d & 1 & 1 \\ 1 & d & 1 \\ 1 & 1 & d \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ. ただし, d は実数である.

(1) A の行列式が $|A| = (d+2)(d-1)^2$ となることを示せ.

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(3) $P^{-1}AP$ を対角行列にする正則行列 P を 1 つ求めよ.

3. 複素平面上に原点を中心とする単位円 C がある. 指数関数 $f(z) = e^z$ について, 次の問いに答えよ. ただし, C の正の向きを反時計方向とする.

(1) 任意の実数 θ に対して, 関数 $F(\theta)$ を $F(\theta) = f(e^{i\theta})$ で定義する.

(a) 関数 $F(\theta)$ の実部と虚部がそれぞれ $e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta)$, $e^{\cos \theta} \sin(\sin \theta)$ となることを示せ.

(b) 等式 $\oint_C \frac{f(z)}{z} dz = i \int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta$ が成り立つことを示せ.

(2) 留数定理を用いて, $\oint_C \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i$ を示せ.

(3) 2 つの定積分 $I = \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta$, $J = \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \sin(\sin \theta) d\theta$ の値を求めよ.