

平成28年度入学者選抜試験問題
山形大学大学院理工学研究科博士前期課程
(平成27年8月実施)

【機械システム工学専攻】

基 礎 科 目
(数 学)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子の本文は、**1ページから2ページまで**です。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの乱丁・落丁および解答用紙の汚れ等に気がついた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 監督者の指示に従って、解答用紙に**受験番号**を正しく記入してください。
受験番号が正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。
5. 解答は所定の用紙の表^{おもて}に記入してください。表^{おもて}に書ききれない場合は裏面を使用しても構いません。
6. 計算によって答えを求めるときは、その過程も示してください。
7. 試験終了後、問題冊子及び草案用紙は持ち帰ってください。

科目名：数 学

この科目の問題は3題あります。3題すべてを解答して下さい。

1. 次の問いに答えよ。

(1) 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(2) 実数 t の関数 $f(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq 1) \\ 1 & (t > 1) \end{cases}$ のラプラス変換

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad \text{を求めよ。}$$

ただし、 s は $\operatorname{Re}(s) > 0$ を満たす複素数とする。

(3) 領域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上の二重積分

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \quad \text{を求めよ。}$$

2. 関数 $f(x) = \pi^x$ について、次の問いに答えよ。

(1) 第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ が、 $f^{(n)}(x) = \pi^x (\log \pi)^n$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) で与えられることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(2) 任意の定数 $r > 0$ および $0 < \theta < 1$ を満たすある定数 θ に対して、

$$\text{区間 } -r < x < r \text{ で、 } R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n, (n = 1, 2, 3, \dots) \text{ とおく。}$$

このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ を示せ。

(3) $f(x)$ をマクローリン展開せよ。

3. 関数 $y(t)$ は、微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t)\{1 - y(t)\}$$

および初期条件 $y(0) = \frac{1}{2}$ を満たす。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $y(t)$ を求めよ。
- (2) $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ を求めよ。
- (3) $y(t)$ の増減, グラフの凹凸を調べ, $y(t)$ のグラフの概形をかけ。