

平成 30 年度入学者選抜試験問題

工 学 部

数 学

前 期 日 程

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子の本文は、1 ページから 4 ページまでです。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明・落丁・乱丁、解答用紙の汚れなどに気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- 4 監督者の指示にしたがって、解答用紙に大学受験番号を正しく記入してください。
大学受験番号が正しく記入されていない場合は、採点されないことがあります。
- 5 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は持ち帰ってください。

〔1〕 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = \tan x + \frac{1}{\tan x}$ について、微分係数 $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)$ を求めよ。

(2) xy 平面上に曲線 $C: y = (1-x)(2x+|x|+1)$ がある。 C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) a を実数の定数とする。連立不等式

$$\begin{cases} |x-1| \leq 2 \\ x^2 - (2a+3)x + a^2 + 3a - 10 \leq 0 \end{cases}$$

を満たす実数 x が存在するように、 a の値の範囲を定めよ。

[2] 関数 $f(x) = xe^{-x}$ ($x \geq 0$) がある。 xy 平面において、曲線 $C: y = f(x)$ 上の変曲点における法線を l とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ のとき、 $f'(x)$ および $f''(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 C の概形をかけ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$ を用いてよい。

(3) 直線 l の方程式を求めよ。

(4) 曲線 C 、直線 l および直線 $x = 1$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

〔3〕 xy 平面上の曲線 $C : y = 2 \sin x \cos x - k(\sin x + \cos x + 1)$ $\left(0 \leq x \leq \frac{3}{4}\pi\right)$
について、次の問いに答えよ。ただし、 k は定数とする。

(1) $t = \sin x + \cos x + 1$ とおく。

(i) $0 \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$ のとき、 t の値の範囲を求めよ。

(ii) $2 \sin x \cos x - k(\sin x + \cos x + 1) = t^2 - (k+2)t$ を示せ。

(2) $k = 0$ のとき、曲線 C と x 軸との共有点の x 座標をすべて求めよ。

(3) 曲線 C が x 軸と共有点を 2 個もつように、 k の値の範囲を定めよ。

[4] 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, a_2 = \pi, a_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a_{n+1}x + \frac{\pi}{2}a_n \right) \cos x dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義するとき、次の問いに答えよ。

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \frac{\pi}{2} - 1$ を示せ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{n+1} + a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める。 $\{b_n\}$ は等比数列であることを示し、その一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_{n+1} - \frac{\pi}{2}a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める。 $\{c_n\}$ は等比数列であることを示し、その一般項を求めよ。

(4) (2) と (3) の結果を用いて、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ の値を求めよ。