

平成 29 年度入学者選抜試験問題
山形大学大学院理工学研究科博士前期課程

(平成 28 年 8 月実施)

【情報科学専攻】

基礎科目
(数学)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子の本文は、1 ページです。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの乱丁・落丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 解答用紙は 3 枚あります。問題 1、問題 2、問題 3 のそれぞれに対して解答用紙 1 枚ずつに解答を記入してください。必要に応じて裏面を使用しても構いません。白紙の場合でも 3 枚すべて提出してください。
5. 監督者の指示に従って、すべての解答用紙に受験番号を正しく記入してください。受験番号が正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。
6. 解答にあたっては、どの問題に対する解答かわかるように、試験開始後、解答用紙の「受験科目」の欄に問題番号も含む形で数学 1、数学 2、数学 3 のように記入してください。また、必要に応じて導出過程も記入してください。
7. 試験終了後、問題冊子及び草案用紙は持ち帰ってください。

科目名：数学

1. 次の問いに答えよ。

(1) xy 平面上の領域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$ に対して、重積分

$$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \text{ を求めよ。}$$

(2) 常微分方程式 $y \frac{dy}{dx} - (y^2 + 1)x = 0$ の一般解を求めよ。

(3) $f(x) = \begin{cases} cx \sin \frac{\pi x}{2} & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$ が確率密度関数となるように、定数 c を定めよ。

2. $A = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ と $B = AA^T$ で定められる行列 A, B について、次の問いに答えよ。ただし、 A^T は A の転置行列を表す。

(1) $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと、 $A = R\left(\frac{\pi}{4}\right) D R\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ が成り立つことを示せ。

(2) 行列 B の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(3) 正の整数 n に対して、 B^n を求めよ。

3. $R > 1$ とする。複素平面上において、 $R, Re^{i\frac{\pi}{3}}$ が表す点をそれぞれ A, B とする。原点 O から点 A に到る線分と点 B から O に到る線分をそれぞれ Γ_1, Γ_2 とし、 O を中心とする半径 R の円の、点 A から点 B に到る円弧を Γ_3 とする。さらに、 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ からなる閉曲線を C とする。このとき、複素関数 $f(z) = \frac{z^2}{z^6 + 1}$ について、次の問いに答えよ。

(1) C の内部にある $f(z)$ の特異点を求め、極形式で表せ。

(2) $\int_{\Gamma_2} f(z) \, dz = \int_0^R f(x) \, dx$ を示せ。

(3) $\left| \int_{\Gamma_3} f(z) \, dz \right| \leq \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^3}{R^6 - 1}$ を示せ。

(4) 留数定理を用いて、 $\int_C f(z) \, dz = \frac{\pi}{3}$ を示せ。

(5) $\int_0^\infty f(x) \, dx$ を求めよ。