

平成 2 9 年度入学者選抜試験問題
山形大学大学院理工学研究科博士前期課程
(平成 2 8 年 8 月実施)

【機械システム工学専攻】

基 礎 科 目
(数 学)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子の本文は、1 ページから 2 ページまでです。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの乱丁・落丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 監督者の指示に従って、解答用紙に受験番号を正しく記入してください。受験番号が正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。
5. 解答用紙は 1 枚です。解答は表^{おもて}面から記入し、表^{おもて}面に書ききれない場合は裏面を使用しても構いません。解答用紙の「受験科目」欄には、「数学」と記入してください。
6. 計算によって答えを求めるときは、その過程も示してください。
7. 試験終了後、問題冊子及び草案用紙は持ち帰ってください。

科目名：数 学

この科目の問題は3題あります。3題すべてを解答して下さい。

1. 次の問いに答えよ。

(1) 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(2) 実数 t の関数 $f(t) = te^{1-t}$ のラプラス変換

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \text{ を求めよ。}$$

ただし、 s は $\operatorname{Re}(s) > -1$ を満たす複素数とする。

(3) 領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ 上の二重積分

$$I = \iint_D xye^{-y^2} dx dy \text{ を求めよ。}$$

2. 関数 $f(x, y) = x^2 \sin^{-1} y$ について、次の問いに答えよ。ただし、 $\sin^{-1} y$ は逆正弦関数を表す。

(1) 偏導関数 f_x , f_y および2階偏導関数 f_{xx} , f_{yy} , f_{xy} を求めよ。

(2) 点 $\left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ での全微分 df を求めよ。

(3) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 $\left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ における接平面の方程式を求めよ。

(4) xyz 空間内で、(3) で求めた接平面と yz 平面との交線を表す方程式を求めよ。

3. 微分方程式

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = -4xy^2, \quad y(0)=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

について、次の問いに答えよ。

(1) $z = y^{-1}$ とおくと、 z は微分方程式

$$z' + \frac{2x}{1+x^2}z = 4x \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

を満たすことを示せ。

(2) (1) の微分方程式②の積分因子 $\exp\left(\int_0^x \frac{2t}{1+t^2} dt\right)$ を求めよ。

(3) 微分方程式①を解け。