

平成31年度入学者選抜試験問題
山形大学大学院理工学研究科博士前期課程
(平成30年8月実施)

【情報科学専攻】

基礎科目
(数学)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子の本文は、1ページのみです。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの乱丁・落丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 監督者の指示に従って、すべての解答用紙に受験番号を正しく記入してください。受験番号が正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。
5. 解答用紙は3枚あります。問題1、問題2、問題3のそれぞれに対して解答用紙1枚ずつに解答を記入してください。必要に応じて裏面を使用しても構いません。白紙の場合でも3枚すべて提出してください。
6. 解答にあたっては、どの問題に対する解答かわかるように、試験開始後、解答用紙の「受験科目」の欄に問題番号も含む形で数学1、数学2、数学3のように記入してください。また、必要に応じて導出過程も記入してください。
7. 試験終了後、問題冊子および草案用紙は持ち帰ってください。

科目名：数学

1. 次の問いに答えよ。

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ を計算し、因数分解した形で答えよ。

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{2 \tan x + x}$ を求めよ。

(3) 関数 $f(x) = x^{\log_e x}$ ($x > 0$) の導関数を求めよ。

2. n を 2 以上の整数とする。2 重積分 $I_n = \int_0^{2^n} dx \int_0^{\sqrt[n]{x}} \frac{dy}{y+1}$ と
定積分 $J_n = \int_0^2 \frac{y^n}{y+1} dy$ について、次の問いに答えよ。

(1) I_n の積分領域 D を xy 平面上に図示せよ。

(2) I_n の積分順序を変更することにより、 $I_n = -J_n + 2^n \log_e 3$ を示せ。

(3) 2 項定理を用いて、 $J_n = \sum_{r=1}^n \frac{n C_r}{r} (-1)^{n-r} (3^r - 1) + (-1)^n \log_e 3$ を示せ。

(4) I_3 の値を求めよ。

3. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ とベクトル $\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ を用いて、数列 $\{a_n\}$ を

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で定めるとき、次の問いに答えよ。

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ。

(2) 正則行列 P を、行列 $\Lambda = P^{-1}AP$ が対角行列になるように定める。

(a) 正則行列 P を 1 つだけ求めよ。

(b) $\mathbf{x}_n = P\Lambda^n P^{-1}\mathbf{x}_0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を示せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を n の式で表せ。