平成３１年度入学者選抜試験問題
山形大学大学院理工学研究科博士前期課程
（平成３０年８月実施）

【電気電子工学専攻】

基礎科目

（数学）

注意事項

１．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

２．この問題冊子の本文は，１ページから４ページまでです。

３．試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの乱丁・落丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

４．監督者の指示に従って，すべての解答用紙の受験番号欄に受験番号を正しく記入してください。

５．解答用紙のおもて面には、既に受験科目名と問題番号が記入されています。解答は解答用紙のおもて面の所定の位置に記入してください。

６．必要に応じて計算過程も記入してください。

７．解答用紙は４枚あります。白紙も含めてすべて提出してください。

８．試験終了後，問題冊子および草案用紙は持ち帰ってください。

基礎科目：数学

１．３次元直交座標系で表されるスカラー場，ベクトル場について次の問いに答えよ。

ただし，x軸，y軸，z軸の正の方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$とする。

(1) 次のスカラー場$f(x,y,z)$の勾配 grad$f(x,y,z)$を求めよ。

(a) $f(x,y,z) = 1 + 2x + 3y + 4z$

(b) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(c) $f(x,y,z) = x + 2yz^2$

(d) $f(x,y,z) = x^3y^2 - yz^3$

(2) 以下のベクトル場$\boldsymbol{A}(x,y,z)$がある。

$$\boldsymbol{A}(x,y,z) = \ x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

次の面積分を求めよ。

$$\int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$$

ただし，領域Sは平面$4x + 2y + z = 4$ の $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ を満たす部分とし，Sの正の向きは$4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$とする。

２．$t \geq 0$で定義された関数$f(t)$について次の積分が存在するとき，$F(s)$を$f(t)$のラプラス変換と呼ぶ。ただし，sは複素数であり，$\mathrm{Re}(s) > 0$ である。

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt$$

関数$f(t) = (-1)^{n+1}$ について次の問いに答えよ。

ただし，$n \leq t < n+1,\ n = 0, 1, 2, \cdots$である。

(1) $f(t)$のグラフの概形を$0 \leq n \leq 3$の範囲で描け。

(2) 以下の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_n^{n+1} (-1)^{n+1} e^{-st}\, dt = \frac{e^{-s} - 1}{s} (-e^{-s})^n$$

(3) $F(s)$ を求めよ。

3．次の問いに答えよ。

(1) 以下の行列X, Y, Zがある。

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & D & E \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}$$

ただし，$a, b, c, A, B, C, D, E, F$は実数である。

(a) 行列式$|X|$を求めよ。

(b) $X = YZ$を満たすとき，a, b, cの値をそれぞれ求めよ。また，積ADFを求めよ。

(2) 以下の行列Mがある。

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

行列式$|M|$を求めよ。

4．以下の実関数$f(t)$について，次の問いに答えよ。ただし，αは正の実数とする。

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

(1)　$f(t)$のグラフの概形を描け。

(2)　$f(t)$のフーリエ変換$F(\omega)$は，

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

で定義される。ただし, ωは実数であり, jは虚数単位である。$F(\omega)$の実部$\mathrm{Re}[F(\omega)]$が以下のようになることを示せ。

$$\mathrm{Re}[F(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

(3)　変数変換$\omega = \alpha \tan\theta$を用いて，次の積分$I$を求めよ。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}[F(\omega)] d\omega$$