

平成30年度入学者選抜試験問題
山形大学大学院理工学研究科博士前期課程

(平成29年8月実施)

【情報科学専攻】

基礎科目
(数学)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子の本文は、1ページです。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの乱丁・落丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 解答用紙は3枚あります。問題1、問題2、問題3のそれぞれに対して解答用紙1枚ずつに解答を記入してください。必要に応じて裏面を使用しても構いません。白紙の場合でも3枚すべて提出してください。
5. 監督者の指示に従って、すべての解答用紙に受験番号を正しく記入してください。受験番号が正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。
6. 解答にあたっては、どの問題に対する解答かわかるように、試験開始後、解答用紙の「受験科目」の欄に問題番号も含む形で数学1、数学2、数学3のように記入してください。また、必要に応じて導出過程も記入してください。
7. 試験終了後、問題冊子及び草案用紙は持ち帰ってください。

科目名：数学

1. 次の問いに答えよ。

- (1) xy 平面上の曲線 $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ 上の点 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ における接線の方程式を求めよ。
- (2) 常微分方程式 $\sqrt{1+y} = \sqrt{1+x} \frac{dy}{dx}$ を初期条件 $y(-1) = 3$ のもとで解け。
- (3) 確率密度関数が $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$ で与えられる分布に対して、平均値と分散を求めよ。

2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。ただし、 $\alpha \neq 0$ とする。

- (1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ。
- (2) $P^{-1}AP$ を対角行列にする正則行列 P を 1 つ求めよ。
- (3) n を正の整数とすると、 $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を n と α の式で表せ。

3. $R > 1$ とする。複素平面上において、 $-R, R, iR$ が表す点をそれぞれ A, B, I とする。点 A から点 B に到る線分を Γ_1 とし、原点 O を中心とする半径 R の円の、点 B から点 I を通って点 A に到る円弧を Γ_2 とする。さらに、 Γ_1, Γ_2 からなる閉曲線を C とする。このとき、複素関数 $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$ について、次の問いに答えよ。但し、 i は虚数単位である。

- (1) 複素関数 $f(z)$ の特異点が $e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}}$ であることを示せ。
- (2) 留数定理を用いて、 $\int_C f(z) dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ を示せ。
- (3) $\int_{\Gamma_1} f(z) dz = 2 \int_0^R f(x) dx$ を示せ。
- (4) $\left| \int_{\Gamma_2} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^4 - 1}$ を示せ。
- (5) 定積分 $\int_0^\infty f(x) dx$ を求めよ。