

平成30年度入学者選抜試験問題
山形大学大学院理工学研究科博士前期課程
(平成29年8月実施)

【機械システム工学専攻】

基礎科目
(数学)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子の本文は、1ページから2ページまでです。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの乱丁・落丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 監督者の指示に従って、解答用紙に受験番号を正しく記入してください。受験番号が正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。
5. 解答用紙は1枚です。解答用紙の「受験科目」欄には、「数学」と記入してください。また、解答は表面^{おもて}から記入し、表面^{おもて}に書ききれない場合は裏面を使用しても構いません。
6. 計算によって答えを求めるときは、その過程も示してください。
7. 試験終了後、問題冊子及び草案用紙は持ち帰ってください。

科目名：数学

この科目の問題は3題あります。3題すべてを解答して下さい。

1. 次の問いに答えよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とする。行列式 $|A|$ および逆行列 A^{-1} を求めよ。

(2) 実数 t の関数 $f(t) = \begin{cases} \sin t & (0 \leq t \leq \pi) \\ 0 & (\pi < t) \end{cases}$ のラプラス変換

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

を求めよ。ただし、 s は $\operatorname{Re}(s) > 0$ を満たす複素数とする。

(3) 領域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上の二重積分

$$I = \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} dx dy$$

を求めよ。

2. C は xy 平面上のなめらかな閉曲線である。曲線 C 上の任意の点 $P(x, y)$ における法線が x 軸、 y 軸と交わる点をそれぞれ Q 、 R とすれば、点 Q は線分 PR の中点である。ただし、点 P は $x^2 + y^2 \neq 0$ を満たす。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $Q(x + yy', 0)$ 、 $R\left(0, y + \frac{x}{y'}\right)$ を示せ。ただし、 $y' = \frac{dy}{dx} \neq 0$ である。

(2) 曲線 C が満たす微分方程式を求めよ。

(3) 曲線 C の方程式を求めよ。

(4) 曲線 C が点 $(1, 0)$ を通るときの曲線 C の方程式を求め、その概形をかけ。

3. O を原点とする座標空間内の 4 点 O , $A(a, a, 1)$, $B(2a, 0, 0)$, $C(0, 3a, 0)$ を頂点とする四面体がある。ただし, a は正の定数である。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) ベクトル \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} を a を用いて成分で表せ。

(2) 外積 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ を a を用いて成分で表せ。

(3) 三角形 ABC の面積と三角形 OBC の面積が等しくなるように, a の値を定めよ。

(4) 点 O から三角形 ABC に下ろした垂線を OH とするとき, 線分 OH の長さを a を用いて表せ。