

令和5年度入学者選抜試験問題  
山形大学大学院理工学研究科博士前期課程  
(令和4年8月実施)

【情報・エレクトロニクス専攻】

基礎科目

(数学)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子の本文は、1ページから4ページまでです。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの乱丁・落丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 監督者の指示に従って、すべての解答用紙の受験番号欄に受験番号を正しく記入してください。  
受験番号が正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。
5. 「微分積分」と「線形代数」は必ず解答してください。  
「フーリエ解析・ラプラス変換」、「情報数学」の2科目から1科目を選択して解答してください。
6. 解答用紙は3枚あります。1科目につき1枚とし、選択科目については「科目名」欄に選択した科目名（「フーリエ解析・ラプラス変換」、「情報数学」）を記入し、

|    |
|----|
| 問題 |
|----|

の空欄には選択した問題番号を記入してください。
7. 解答は必ずおもて面の太線の下に記入してください。
8. 試験終了後、問題冊子および草案用紙は持ち帰ってください。

令和4年度入学者選抜試験問題  
山形大学大学院理工学研究科博士前期課程  
(10月入学)  
(令和4年8月実施)

【情報・エレクトロニクス専攻】

基礎科目

(数学)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子の本文は、1ページから4ページまでです。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの乱丁・落丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 監督者の指示に従って、すべての解答用紙の受験番号欄に受験番号を正しく記入してください。  
受験番号が正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。
5. 「微分積分」と「線形代数」は必ず解答してください。  
「フーリエ解析・ラプラス変換」、「情報数学」の2科目から1科目を選択して解答してください。
6. 解答用紙は3枚あります。1科目につき1枚とし、選択科目については「科目名」欄に選択した科目名（「フーリエ解析・ラプラス変換」、「情報数学」）を記入し、

|    |
|----|
| 問題 |
|----|

の空欄には選択した問題番号を記入してください。
7. 解答は必ずおもて面の太線の下に記入してください。
8. 試験終了後、問題冊子および草案用紙は持ち帰ってください。



### 問題 1 微分積分

$a$  を正の定数とする。2変数関数  $f(x, y) = \frac{e^{-(x+y)}}{(x-y)^2 + a^2}$  について、次の問いに答えよ。  
ただし、 $e$  は自然対数の底である。

(1) 偏導関数  $\frac{\partial f}{\partial x}$  を求めよ。

(2)  $xy$  平面上の領域  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x - y \leq a, 0 \leq x + y \leq a\}$  が、変数変換  $u = x - y$ ,  $v = x + y$  によって、 $uv$  平面上の領域  $E$  に対応する。関数  $f(x, y)$  の  $D$  上の2重積分を

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

とおく。

(a)  $uv$  平面上に領域  $E$  を図示せよ。

(b) ヤコビアン  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$  を求めよ。

(c)  $I = \frac{1}{2} \iint_E \frac{e^{-v}}{u^2 + a^2} du dv$  となることを示し、 $I$  の値を求めよ。

(d)  $\lim_{a \rightarrow +0} I$  を求めよ。

## 問題 2 線形代数

実数  $\lambda$  が  $\lambda \neq 0$  を満たすとき, 3つの行列:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ。ただし, 以下では  $n$  を自然数とする。

- (1) 逆行列  $P^{-1}$  を求め,  $A = PJP^{-1}$  を示せ。
- (2) 数学的帰納法を用いて,  $J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$  を示せ。
- (3)  $A^n = PJ^nP^{-1}$  を示し,  $A^n$  を  $n$  と  $\lambda$  の式で表せ。
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\lambda^{n-1}} A^n$  を求めよ。

問題3 フーリエ解析・ラプラス変換（選択問題）

- (1)  $(-\infty, +\infty)$ を定義域とする関数 $f(t)$ に対して、実数 $\omega$ を含む積分

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

が存在するとき、 $F(\omega)$ を $f(t)$ のフーリエ変換という。

関数 $f(t)$ が

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \left(|t| \leq \frac{T}{2}\right) \\ 0 & \left(|t| > \frac{T}{2}\right) \end{cases}$$

で定義されるとき、 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求め、 $F(\omega)$ の値が実数になることを示せ。ただし、 $e$ 、 $i$ はそれぞれ自然対数の底と虚数単位を表し、 $T$ を正の定数とする。

- (2) 関数 $g(t)$ は $g(t) = 1 - \frac{|t|}{\pi}$  ( $-\pi \leq t < \pi$ )で定義され、かつ、周期 $2\pi$ をもつ。 $g(t)$ をフーリエ級数に展開すると、

$$g(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

となる。ただし、 $a_0, a_1, a_2, \dots$ と $b_1, b_2, b_3, \dots$ はすべて定数である。次の問いに答えよ。

(a)  $a_0$ の値を求めよ。さらに、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $a_n, b_n$ を求めよ。

(b)  $g(0) = 1$ を用いて、 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ を示せ。

問題 4 情報数学 (選択問題)

(1) 次の問いに答えよ。

(a)  $p, q$  を命題とするとき, 真理値表を用いて次の関係式を示せ。

$$p \vee (p \wedge q) \iff p$$

(b)  $A, B$  を集合とするとき, 次の恒等式を示せ。

$$A \cup (A \cap B) = A$$

(2) 2つの1次合同方程式:

$$5x \equiv 1 \pmod{9} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$9x \equiv 1 \pmod{5} \quad \dots \textcircled{2}$$

について, 次の問いに答えよ。

(a) 1次合同方程式①の一般解を求めよ。

(b) 1次合同方程式②の一般解を求めよ。

(c) 1次合同方程式①と②を同時に満たす  $x$  を求めよ。