

令和 7 年度入学者選抜試験問題
山形大学大学院理工学研究科博士前期課程
(令和 6 年 9 月実施)

【数理情報システム専攻・情報工学領域】

数 学

(微分積分, 線形代数)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで, この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子の本文は 1 ページから 3 ページまでです。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの乱丁・落丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は, 手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 監督者の指示に従って, すべての解答用紙に受験番号を正しく記入してください。受験番号が正しく記入されていない場合は, 採点できないことがあります。
5. 解答用紙のおもて面には, すでに受験科目名と問題番号が記入されています。解答は解答用紙のおもて面の太線の下に記入してください。裏面を使用してはいけません。
6. 必要に応じて計算過程も記入してください。
7. 解答用紙は 3 枚あります。大問 1 間につき 1 枚です。
8. 試験終了後, 問題冊子および草案用紙は持ち帰ってください。

問題 1

次の問いに答えよ。

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ。

(2) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 8^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$ を求めよ。

(3) $a > 0$, $b > 0$ とする。 xy 平面上の楕円 $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を a , b の式で表せ。

問題 2

xy 平面上の領域：

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \pi, x \geq 0, y \geq 0\}$$

が、極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ によって、 $r\theta$ 平面上の領域 R に対応する。

D 上の 2 重積分：

$$I = \iint_D x^2 \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

$$J = \iint_D y^2 \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

について、次の問いに答えよ。

(1) $r\theta$ 平面上に領域 R を図示せよ。

(2) ヤコビアン $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial r}$ を r の式で表せ。

(3) 極座標変換を用いて、 $I = J$ を示せ。

(4) $I + J = \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{\pi}} r^3 \sin r^2 dr$ を示し、 $I + J$ の値を求めよ。

(5) I と J の値を求めよ。

問題 3

行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha^2 - 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。ただし、 α は実数である。

- (1) A の固有値が ± 1 であることを示せ。
- (2) A の固有ベクトルを α の式で表せ。
- (3) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を満たす正則行列 P を1つだけ求め、 α の式で表せ。
- (4) n を自然数とするとき、 A^{2n} を求めよ。