平成25年度入学者選抜試験問題

工　学　部

数　　学

前　期　日　程

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2　この問題冊子の本文は，1ページから4ページまでです。

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明・落丁・乱丁，解答用紙の汚れなどに気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

4　監督者の指示にしたがって，解答用紙に**大学受験番号**を正しく記入してください。**大学受験番号**が正しく記入されていない場合は，採点されないことがあります。

5　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は持ち帰ってください。

〔**1**〕 次の問いに答えよ。

(1) 2つの循環小数 $a = 1.\dot{2}$, $b = 0.\dot{8}\dot{1}$ に対して，ab の値を求めよ。

(2) a を定数とする。xy 平面上の曲線 $y = \log_2 x$ と直線 $y = x + a$ は2つの共有点をもつ。共有点の x 座標 x_1, x_2 が $x_2 = 4x_1$ を満たすように，a の値を定めよ。

(3) xy 平面において，曲線 $C : y = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ と直線 $y = -x + \dfrac{10}{3}$ の2つの共有点を A, B とする。曲線 C 上の点 P が PA = PB を満たすとき，△PAB の面積を求めよ。

〔**2**〕 $\triangle$OAB は，$\angle \mathrm{AOB} = 90^\circ$, $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 1$ を満たす。3 辺 OA, AB, BO を $t : (1-t)$ $(0 < t < 1)$ に内分する点を，それぞれ C, D, E とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ を t, $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2$, $|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|^2$ を t の式で表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CE}}$ を示せ。

(4) $\triangle$CDE の面積を $S(t)$ とする。

(i) $S(t) = \dfrac{3t^2 - 3t + 1}{2}$ を示せ。

(ii) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき，$S(t)$ の最小値を求めよ。

〔**3**〕 関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2 \ (x \geqq 0)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ とする。xy 平面上に 2 曲線 $C_1 : y=f(x)$ と $C_2 : y=f^{-1}(x)$ がある。次の問いに答えよ。

(1) 2 曲線 $C_1,\ C_2$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(2) $a \geqq 2$ とする。曲線 C_1 上の点 $\mathrm{A}\left(a, \dfrac{a^2}{2}\right)$ における接線を l_1，曲線 C_2 上の点 $\mathrm{B}\left(\dfrac{a^2}{2}, a\right)$ における接線を l_2 とし，2 直線 $l_1,\ l_2$ のなす角を $\theta \ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。

(i) $\tan\theta$ を a の式で表せ。

(ii) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \sin^2\theta$ を求めよ。

〔**4**〕 行列 $A=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} p & -2 \\ 1 & q \end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ が $AB=BJ$ を満たすとき，次の問いに答えよ。ただし，p, q は定数であり，以下で用いる n は自然数である。

(1) p, q の値を求めよ。

(2) $J^n=\dfrac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を示せ。

(3) $A^n=\dfrac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1+2n & -2n \\ 2n & 1-2n \end{pmatrix}$ を示せ。

(4) 行列 A^n の表す 1 次変換により，xy 平面上の点 $(p,1)$, $(-2,q)$ が，それぞれ点 P_n, Q_n に移される。原点を O として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ のなす角を θ_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\theta_n$ を求めよ。