

令和2年度入学者選抜試験問題

工 学 部

数 学

前 期 日 程

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子の本文は、1 ページから4 ページまでです。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明・落丁・乱丁、解答用紙の汚れなどに気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- 4 監督者の指示にしたがって、解答用紙に大学受験番号を正しく記入してください。
大学受験番号が正しく記入されていない場合は、採点されないことがあります。
- 5 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は持ち帰ってください。

〔1〕 次の問いに答えよ。

(1) 3点 $A(1, 0)$, $B(5, 8)$, $C(2, 7)$ を通る円の半径を求めよ。

(2) 2つのベクトル $\vec{a} = (t, t+1)$ と $\vec{b} = (1, 1)$ のなす角が $\frac{\pi}{6}$ であるとき, t の値を求めよ。

(3) 2次方程式 $4x^2 + 6mx + 17 = 0$ が有理数の解をもつような自然数 m の値をすべて求めよ。

〔2〕 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{4}, a_{n+1} = \frac{1 + \sqrt{a_n}}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

(1) $\frac{1}{4} \leq a_n < 1$ を示せ。

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $a_n = \cos^2 \theta_n$ $\left(0 \leq \theta_n \leq \frac{\pi}{2}\right)$ とおく。

(i) θ_1 の値を求めよ。

(ii) 数列 $\{\theta_n\}$ が漸化式 $\theta_{n+1} = \frac{1}{2}\theta_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たすことを示せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

〔3〕 関数 $f(x) = ax^2 + bx$ に対して、 $y = f(x)$ のグラフは 2 点 $A(1, 1)$, $B\left(\frac{1}{2}, t\right)$ を通る。
次の問いに答えよ。ただし、 a, b, t は定数である。

(1) a, b を t の式で表せ。

(2) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(3) $f(x)$ が $0 < x < 1$ の範囲で極値をもたないための必要十分条件は、 $\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}$
であることを示せ。

(4) $t = \frac{1}{4}$ と $t = \frac{3}{4}$ のときの放物線 $y = f(x)$ をそれぞれ C_1, C_2 とする。 C_1 と C_2
で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

[4] 関数 $f(x) = \sin\left(\log_e \frac{1}{x}\right)$ ($0 < x \leq 1$) がある。数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$a_n = e^{-(n-1)\pi}, \quad b_n = \int_{a_{n+1}}^{a_n} |f(x)| dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

(1) $f(a_n) = 0$ を示せ。

(2) 数列 $\{s_n\}, \{c_n\}$ を

$$s_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-t} \sin t dt, \quad c_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-t} \cos t dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。

(i) $b_n = (-1)^{n-1} s_n$ を示せ。

(ii) $s_n + c_n = (-1)^{n-1} e^{-n\pi} (1 + e^\pi)$ および $s_n = c_n$ を示せ。

(iii) $b_n = \frac{1}{2} e^{-n\pi} (1 + e^\pi)$ を示せ。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ の値を求めよ。